Preparaduría III

1.- Sean A y C matrices $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente.

a) Pruebe que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\,|C|$$

b) Calcular

$$\begin{vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} I_m & B \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

c) Dar una fórmula para

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ C & B \end{vmatrix}$$

2.- Dar otra demostración del teorema sobre el determinante de la composición de $A \in M_n$, $B \in M_n$ considerando esta vez el determinante

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{vmatrix}$$

[cf. el ejercicio anterior, parte a)] Hacer las operaciones elementales de columna necesarias para anular la submatriz B. Observe que queda un determinante de la forma

$$\begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$$

Quien es C? evalúe este determinante.

3.- El *rango* de una matriz A [que denotaremos $\text{rk}(A)$] es la dimensión de $Im\,(A)$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vectores en $\mathbb{F}^n$, y A la matriz cuya i-ésima columna es α_i.

a) Muestre que $\dim[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = \mathrm{rk}(A)$.

b) Sea P una matriz $n \times n$, y $PA = (P\alpha_1, P\alpha_2, \ldots, P\alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Suponga que P es invertible. Demuestre que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ lo son.

c) Hallar la dimensión y dar una base para el espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2,1,3,1)^t \\ \alpha_2 &= (1,2,0,1)^t \\ \alpha_3 &= (0,2,-2,1)^t \\ \alpha_4 &= (1,1,1,1)^t \end{aligned}$$

4.- Calcule el rango de las siguientes matrices

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \qquad d) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

5.- Sea V el conjunto de todos los números complejos considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales. Hallar una función de V en V que sea una transformación lineal en ese espacio vectorial, pero que no sea una transformación lineal cuando V se piensa como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

6.- Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Compruebe que si existe una transformación lineal $T : V \to V$ cuyo núcleo es idéntico a su imagen, entonces n es par. Sea V un espacio vectorial y T una transformación lineal de V en V. Compruebe que es equivalente afirmar, por una parte, que la intersección de la imagen de T y el núcleo de T es trivial y, por otra parte, que $T(T(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow T\alpha = 0$.

7.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea T un operador lineal sobre V. Si $\mathrm{rk}(T^2) = \mathrm{rk}(T)$, demuestre que la imagen y el núcleo de T tienen intersección trivial.

8.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$. Dar la matriz que corresponde a esta transformación lineal: a) Con respercto a $\mathfrak{B}$, la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$, y $\mathfrak{B}'$, la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^2$. b) Con respecto a las bases $\mathfrak{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathfrak{B}' = (\beta_1, \beta_2)$, donde $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$, $\beta_1 = (0, 1)$, $\beta_2 = (1, 0)$.

9.- Demuestre que $\text{rk}(A) = 1$ si, y sólo si, $A = xy^t$, con x, y vectores (columna).

10.- Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Para toda matriz $m \times n$ A de rango r existen matrices $m \times m$, $n \times n$ invertibles P y Q tales que

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

b) Para toda matriz A $n \times n$ de rango r existe una matriz P $n \times n$, invertible, tal que

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

c) Si A es una matriz real y A^{-1} existe sobre $\mathbb{C}$, entonces A^{-1} también es real.

d) Si $(A^*)^2 = A^2$ [notación del ejercicio 21, prepa II], entonces $A^* = A$ o $A^* = -A$.

e) Si $\text{rk}\,(A) = \text{rk}\,(B)$ entonces $\text{rk}\left(A^2\right) = \text{rk}\left(B^2\right)$.

f) $\text{rk}\,(A + B) \leq \text{rk}\,(A) + \text{rk}\,(B)$.

g) Como $(1, i)$, $(i, -1)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \text{ es invertible}$$

11.- Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Muestre que si $AB = 0$ entonces $\text{rk}\,(A) + \text{rk}\,(B) \leq n$.

12.- Muestre que si B es una submatriz de A que se obtiene al eliminar s filas y t columnas de A, entonces $\text{rk}\,(A) \leq s + t + \text{rk}\,(B)$.

13.- Sean $A, B \in M_n(C)$. Muestre que $\text{rk}\,(AB) \leq \min\{\text{rk}\,(A), \text{rk}\,(B)\}$. y que $\text{rk}\,(A + B) \leq \text{rk}\,(A) + \text{rk}\,(B) \leq \text{rk}\,(AB) + n$.

14.- Muestre que si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ satisface:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

entonces A es no singular.

15.- Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demuestre que existe una matriz $n \times n$ no nula B tal que $AB = 0$ si, y sólo si, $|A| = 0$.

16.- Sea A una matriz real. Muestre que si el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ tiene solución compleja no nula, entonces tiene una solución real no nula.

17.- Suponga que A y B son matrices $m \times n$. Muestre que $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen el mismo espacio de soluciones si, y sólo si, existe una matriz invertible C tal que $A = CB$. Utilizar ésto para probar que si $\mathrm{rk}\left(A^2\right) = \mathrm{rk}(A)$, entonces existe una matriz invertible D tal que $A^2 = DA$.

18.- Si $Ax = b \neq 0$ tiene soluciones $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, compruebe que su combinación lineal $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \ldots + \lambda_n\eta_n$ es otra solución si, y sólo si, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.